Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 5(1) (2020), 1-30

Egzotični brojevni sistemi

Nebojša Č. Dinčić
Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku
Višegradska 33
Niš, Srbija
e-mail: `ndincic@hotmail.com, nebojsa.dincic@pmf.edu.rs`

Abstract

Predstavljeni su primeri manje poznatih brojevnih sistema, metode računanja u njima, kao i praktična primena.

Ključne reči i fraze: brojevni sistem, pozicioni brojevni sistem

Počnimo ovaj tekst jednom matematičkom šalom nepoznatog autora – **Postoji 10 vrsta ljudi: oni koji razumeju binarne brojeve, i oni koji ih ne razumeju**.

1 Uvod u brojevne sisteme

Sistem simbola i pravila njihovog kombinovanja za simboličko predstavljanje brojeva naziva se brojevni (ili numerički) sistem. U zavisnosti od toga da li vrednost cifre zavisi od njene pozicije u zapisu boja ili samo od njene sopstvene vrednosti, brojevni sistem može biti pozicioni ili nepozicioni. Kod pozicionih brojevnih sistema vrednost cifre broja jednaka je proizvodu sopstvene vrednosti cifre i vrednosti pozicije u broju u kojem se cifra nalazi. U zavisnosti od toga da li je količnik vrednosti susednih pozicija konstantan ili nije, pozicioni brojevni sistem može biti sistem sa fiksnom bazom ili sistem sa mešovitom bazom. Baza brojevnog sistema je uglavnom prirodan broj, ali ćemo u nastavku videti da to nije obavezno.

Kod uobičajenih ("standardnih") brojevnih sistema baza je prirodan broj b i koristi se b različitih cifara d_k (obično $\{0, 1, ..., b-1\}$) za predstavljanje svakog realnog broja (uz prirodnu pretpostavku $d_n \neq 0$):

$$(d_n...d_1d_0, d_{-1}d_{-2}...)_b = d_n \cdot b^n + ... + d_1 \cdot b + d_0 + d_{-1} \cdot b^{-1} + ... =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} d_k b^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} b^{-k}$$

Po analogiji sa dekadnim sistemom, imamo $b-$narni zarez odnosno $b-$narnu tačku[1]; oni razdvajaju ceo i razlomljeni deo broja zapisanog u bazi b. Kad ne postoji opasnost od zabune, umesto zapisa $(d_n...d_1d_0, d_{-1}d_{-2}...)_b$ piše se samo $d_n...d_1d_0, d_{-1}d_{-2}...$

Od brojevnog sistema se obično očekuje da njime mogu da se predstavljaju svi brojevi iz određenog značajnog skupa (celi, racionalni itd.) na jedinstven način (ili barem da imaju jedinstvenu standardnu formu), i da odražava aritmetičku i algebarsku strukturu tih brojeva.

Primer 1.1.

1. *Primer nepozicionog brojevnog sistema su rimski brojevi.*

2. *Primer pozicionog brojevnog sistema su dobro nam poznati dekadni sistem (baza $b = 10$), kao i binarni ($b = 2$), oktalni ($b = 8$) i heksadekadni ($b = 16$) koji se koriste kod računara, i o kojima ovde neće biti reči.*

3. *Sistem za prikazivanje uglova (stepen, minut, sekund) ili merenje vremena (dan, sat, minut, sekund) su bliski nam primeri pozicionih brojevnih sistema sa mešovitom osnovom, o čemu će biti reči kasnije.*

Napomenimo da niz cifara "10" u svakom $n-$arnom sistemu označava bazu: $10_{10} = 10$, $10_2 = 2$, $10_{16} = 16$. Kako ne bi dolazilo do zabune, programeri često pišu $0b$ ispred binarnog i $0x$ ispred heksadecimalnog broja, tj. $0b10$ je 2 u binarnom sistemu, $0x10$ je 16 u heksadecimalnom.

[1] 22. Generalna konferencija za tegove i mere ([27]) proglasila je 2003. godine da "simbol za decimalni znak treba da bude tačka ili zarez". Dalje je potvrđeno da se "brojevi mogu podeliti u grupe od tri kako bi se olakšalo čitanje, ni tačke ni zarezi ne treba da se ubacuju u razmake između grupa" (npr. 1 000 000 000). Zbog toga je ova upotreba preporučena od strane tehnikih organizacija, kao to je Nacionalni institut za standarde i tehnologiju. U Srbiji se koristi decimalni zarez, dok se za razdvajanje grupa od po tri cifre koristi tačka, npr. $1.234.567, 89$

Svrha ovog teksta je da čitaoca upozna sa nekim neobičnim brojevnim sistemima, i ukaže na neke od njihovih često iznenađujućih primena. Čitalac koji je više zainteresovan za istoriju brojevnih sistema mnogo korisnih informacija može pronaći npr. u [9]. Kako je u pitanju samo pregled tih sistema, nije bilo prostora da se ulazi u detalje računanja u njima (tim pre što neki od njih imaju mnogo osobenosti). Znatiželjnom čitaocu ovaj tekst (i navedena obimna literatura) neka posluži kao polazna tačka za istraživanje. Mnogobrojne fusnote su tu da čitalac lakše uvidi raznovrsnost konteksta u kojima se javlja problem brojevnih sistema, kao i da su se time bavili kako srednjoškolci tako i značajni matematičari i informatičari XX veka.

2 Nepozicioni brojevni sistemi

Smatra se da su svi brojevni sistemi razvijeni pre vavilonskog bili nepozicionog tipa. U nastavku dajemo kratak pregled dva nepoziciona sistema.

2.1 Unarni brojevni sistem

Unarni brojevni sistem je bijektivni sistem sa bazom 1 (videti sekciju 3.4). Ovo je najjednostavniji brojevni sistem u kojem se koristi samo jedan simbol, recimo cifra 1, i gde se prirodan broj N predstavlja kao N puta ponovljen simbol 1. Dakle:

$$1 = 1,\ 2 = 11,\ 3 = 111,\ 4 = 1111,\ 5 = 11111,\ ...$$

Operacije sabiranja i oduzimanja u ovom sistemu su izuzetno jednostavne, dok je množenje znatno složenije, i često je korišćeno kao test slučaj za Tjuringove mašine[2].

Iako nepraktičan za računanje, ipak ima i svoje primene. Koristi se kao deo kompresionih algoritama kao što je Golumovo kodiranje[3], zatim kod

[2]Tjuringova mašina je matematički model koji definiše "uređaj" koji manipuliše simbolima na beskonačnoj traci podeljenoj na ćelije prema zadatoj tablici sa pravilima. Uprkos svojoj jednostavnosti, može se konstruisati Tjuringova mašina koja je u stanju da simulira logiku bilo kog računarskog algoritma. Naziv nosi po svom tvorcu, Alanu Tjuringu (Alan Mathison Turing, 1912–1954), istaknutom engleskom matematičaru, logičaru i kriptografu, koji se smatra ocem modernog računarstva.

[3]Metod za kompresiju podataka bez gubitaka, zasnovan na familiji algoritama koje je dao američki matematičar i inženjer Solomon Wolf Golomb (1932–2016).

Peanove aksiomatizacije[4] u matematičkoj logici, dok se jedan oblik unarne notacije - Čerčovo kodiranje[5] - koristi u tzv. lambda-računu[6].

2.2 Rimski brojevi

Rimski brojevi predstavljaju sjajan primer nepozicionog brojevnog sistema, gde su u svojstvu cifara iskorišćena određena slova iz latinskog alfabeta:

rimska cifra	I	V	X	L	C	D	M
vrednost	1	5	10	50	100	500	1000

Cifre se uglavnom grupišu tako da veće idu levo, a manje desno. Pritom nijedna cifra ne sme da se javi više od tri puta u nizu, tj. maksimalni broj je $MMMCMXCIX = 3999$.
Na primer, rimski broj III označava $III = 1 + 1 + 1 = 3$, jer svaki simbol I ima istu vrednost 1, nezavisno od svog položaja. Ipak, ovaj sistem nije potpuno nepozicioni, zato što kad se manja cifra nađe neposredno ispred veće, onda se od nje oduzima, te prema tome IV znači $5 - 1 = 4$, dok VI znači $5 + 1 = 6$. To isto se koristi i kod XL, XC, CD, CM.

Vredi pomenuti da su za razlomke u antičkom Rimu koristili osnovu 12, jer 12 ima veći broj delilaca od broja 10. Rimski brojevi nisu imali ni nulu; umesto simbola u srednjem veku korišćena je reč *nulla* ili, ređe, slovo N.

Za zapis brojeva većih od hiljadu korišćen je *vinculum* sistem, po kojem je nadvučeni rimski broj tumačen kao hiljadu puta veći od navedene vrednosti, npr. $\overline{IV} = 4.000$, $\overline{XXV} = 25.000$.

Poreklo ovog brojevnog sistema je u starom Rimu, i zadržao se pre svega u Evropi do poznog srednjeg veka. Postepeno je zamenjivan efikasnijim indo-arapskim dekadnim sistemom, posebno pod uticajem čuvene Fibonačijeve knjige *Liber abaci* iz 1202. godine. Danas se ponajviše mogu sresti na nekim časovnicima, u imenima vladara i papa, nastavcima filmova i video igara, za numerisanje sportskih takmičenja koja se periodično ponavljaju, itd.

Kao polazna tačka radoznalom čitaocu može da posluži [28] i tamo navedena literatura.

---

[4] Giuseppe Peano (1858–1932), italijanski matematičar i logičar

[5] Alonzo Church (1903–1995), Američki matematičar i logičar,

[6] Lambda račun, koji se naziva i $\lambda-$kalkulus je formalni sistem matematičke logike kojim se izražavaju izračunavanja zasnovana na funkciji apstrakcije i aplikacije upotrebom vezivanja promenljivih i supstitucije. To je univerzalni model računanja koji može da simulira bilo koju Tjuringovu mašinu.

3 Neki neobični pozicioni brojevni sistemi

3.1 $\beta-$razvoj

Kao uopštenje klasičnog decimalnog zapisa realnog broja x koristi se tzv. $\beta-$razvoj ($\beta > 1$),

$$x = d_n...d_1d_0, d_{-1}...d_{-m} = d_n \cdot \beta^n + ... + d_1 \cdot \beta + d_0 + d_{-1} \cdot \beta^{-1} + ... + d_{-m}\beta^{-m},$$

gde su $d_i,\ 0 \le d_i < \beta$, cifre. Ovaj sistem predložili su Renji[7][19] 1957. i Peri[8] [17] 1960. Svaki realan broj ima bar jedan (možda beskonačan) $\beta-$razvoj. Za razliku od dekadnog sistema gde su svi konačni decimalni zapisi jedinstveni, čak ni konačni $\beta-$zapisi ne moraju biti takvi (videćemo kasnije za $\beta = \varphi$).

Za nalaženje cifara pozitivnog realnog broja x u bazi $\beta > 1$ koristi se *"pohlepni"*[9] algoritam koji se zasniva na sledećem:

- postoji[10] jedinstven ceo broj k takav da $\beta^k \le x < \beta^{k+1}$
- stavimo[11] $d_k := \lfloor \frac{x}{\beta^k} \rfloor,\ \ r_k := \{\frac{x}{\beta^k}\}$
- za $-\infty < j \le k-1$ stavljamo $d_j := \lfloor \beta r_{j+1} \rfloor,\ \ r_j := \{\beta r_{j+1}\}$

Iako deluje kao čisto teorijski koncept, $\beta-$razvoj ima praktičnih primena u teoriji kodiranja i pri modeliranju kvaziperiodičnih kristala[12].

3.2 Ternarni i balansirani ternarni brojevni sistem

Ternarni brojevni sistem (ili sistem sa osnovom 3) je pozicioni brojevni sistem koji koristi samo cifre 0, 1, 2. Ternarna cifra se često, po analogiji sa bitom (skraćeno od **b***inary dig***it**), naziva **trit** (skraćeno od **tr***inary dig***it**).

[7] Alfréd Rényi (1920–1970), mađarski matematičar; on je autor izjave "Matematičar je mašina koja pretvara kafu u teoreme" koja se pogrešno pripisuje čuvenom Erdošu.

[8] William Parry (1934–2006), engleski matematičar

[9] Pohlepni (eng. greedy) algoritam je opšti naziv za algoritme koji pri rešavanju problema u svakom koraku prave lokalno najbolji izbor, sa nadom da će tako doći do globalno najboljeg rešenja.

[10] Prema Arhimedovoj aksiomi, koja je fundamentalno svojstvo realnih brojeva.

[11] U nastavku sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći ceo broj manji ili jednak broju x, dok $\{x\}$ označava razlomljeni deo broja x; za pozitivne x važi $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

[12] Kvazikristal ili kvaziperiodični kristal je čvrsto telo koje poseduju uređenu strukturu i simetrije koje su zabranjene u klasičnoj kristalografiji.

Računanje u ternarnom brojevnom sistemu je slično uobičajenom računanju u dekadnom sistemu. Pokažimo postupak za pretvaranje prirodnog broja iz dekadnog u ternarni sistem:

1. delimo broj sa 3
2. ceo deo količnika uzimamo za narednu iteraciju
3. ostatak pri deljenju uzimamo za ternarnu cifru
4. ponavljamo korake $1-3$ dok količnik ne postane 0

Primer 3.1. *Konvertujemo broj*[13] *97 u ternarnu bazu:*

$$\begin{aligned}97 &= 3\cdot 32+1\\ 32 &= 3\cdot 10+2\\ 10 &= 3\cdot 3+1\\ 3 &= 3\cdot 1+0\\ 1 &= 3\cdot 0+1\end{aligned}$$

Dakle, $97 = 10121_3$. *Provera:* $1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+1\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3^0=97$

Balansirani ternarni sistem koristi cifre $-1,\ 0,\ 1$ mada se obično umesto vrlo nepodesne cifre -1 koristi neki drugi simbol, npr. T, kao ligatura simbola 1 i $-$. Dakle, jedna neobičnost ovog sistema je korišćenje negativne cifre! Balansiranost znači da svakoj pozitivnoj cifri odgovara jedinstvena negativna cifra (u opštem slučaju se označava kao nadvučena pozitivna cifra) - to znači da baza mora biti neparan broj.

Primer 3.2. *Pokazali smo da* $97 = 10121_3$. *Sada ćemo konvertovati ovaj broj u balansiranu ternarnu bazu, tako što svaku cifru 2 zamenjujemo sa* $3-1$*:*

$$\begin{aligned}&1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+1\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3^0=\\ &=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+1\cdot 3^2+(3-1)\cdot 3^1+1\cdot 3^0=\\ &=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+2\cdot 3^2-3^1+1\cdot 3^0=\\ &=1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+(3-1)\cdot 3^2-3^1+1\cdot 3^0=\\ &=1\cdot 3^4+1\cdot 3^3-3^2-3^1+1\cdot 3^0=\\ &=11TT1_{bal3}\end{aligned}$$

[13] U celom tekstu, ukoliko drugačije nije navedeno, broj kod kojeg nije naglašena baza je u dekadnom zapisu.

Provera: $1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 - 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 97$.
Ukoliko je potrebno uravnotežiti terazije sa dva tasa za datu masu 97 *i tegove od* $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$*, iz ovog zapisa vidimo da na jedan tas treba staviti predmet i tegove od* 3 *i* 9*, a na drugi tegove od* $1, 27$ *i* 81*. Sada postaje još jasnije zašto se ovakav brojevni sistem zove balansiranim.*

Ternarni brojevni sistem je vrlo pogodan za prikazivanje fraktalnih struktura gde se u konstrukciji koristi deoba na tri dela, kao što su trougao Sjerpinjskog i Kantorov skup. Bez ulaženja u detalje, pomenimo da po konstrukciji Kantorov skup sadrži sve one realne brojeve iz segmenta $[0, 1]$ koji u svom ternarnom zapisu ne sadrže nijednu cifru 1 (ukoliko broj ima dva ternarna zapisa, i jedan od njih ne sadrži cifru 1, priradaće Kantorovom skupu).

U ranim danima računara napravljeno je nekoliko eksperimentalnih sovjetskih kompjutera koji su koristili balansirani ternarni sistem umesto binarnog [22]. Najpoznatiji je Setun, kojeg je 1958. godine na državnom moskovskom univerzitetu razvio tim koji su predvodili Soboljev[14] i Brusencov[15]. Više detalja može se naći na [25]. Pomenimo da je Setun koristio *trajt*[16] koji se sastoji od šest tritova (približno 9,5 bitova).

Balansirani ternarni sistem prvi put se pojavio u knjiza Štifela[17] *Arithmetica integra* iz 1544. godine.

3.3 Brojevni sistem sa racionalnom bazom $\frac{3}{2}$

Pokazaćemo u nastavku na jednostavnom primeru kako i proizvoljan racionalan broj veći od 1 može da bude baza brojevnog sistema.

Primer 3.3. *Prirodan broj* $N = 11$ *predstavićemo u bazi sa osnovom* $\frac{3}{2}$*, najpre vizuelno. Pretpostavimo da imamo na raspolaganju nekoliko kutija poređanih u niz, i da je u krajnje desnoj kutiji (nju proglašavamo prvom kutijom, druga je odmah levo od nje, itd.) smešteno svih 11 kuglica. U svakom koraku možemo uzeti tri kuglice iz neke kutije (ukoliko, naravno, u njoj ima toliko kuglica) i staviti dve kuglice u kutiju neposredno levo od posmatrane kutije. Primenićemo opisani postupak dokle je to moguće.*

[14]Sergei Lvovich Sobolev (1908–1989), istaknuti sovjetski matematičar koji se bavio matematičkom analizom i parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Dovoljno je pomenuti samo prostor Soboljeva.

[15]Nikolay Petrovich Brusentsov (1925–2014), sovjetski informatičar

[16]eng. tryte, po analogiji sa bit-bajt

[17]Michael Stifel (1487–1567), nemački monah, protestantski reformator i matematičar

- *Uzimamo tri puta po tri kuglice iz prve kutije, i stavljamo tri puta po dve kuglice u drugu kutiju. U prvoj kutiji ostale su dve kuglice, a u drugoj je sada ukupno šest kuglica*

$$| \quad | \quad | * * * * * * | * * |$$

- *Iz druge kutije uzimamo dva puta po tri kuglice, a u treću kutiju stavljamo dva puta po dve kuglice. U prvoj kutiji i dalje su dve kuglice, druga je prazna, a u trećoj se sada nalaze četiri kuglice*

$$| \quad | * * * * | \quad | * * |$$

- *Iz treće kutije uzimamo tri kuglice, i u četvrtu stavljamo dve kuglice*

$$| * * | * | \quad | * * |$$

- *Pošto ni u jednoj kutiji nemamo bar tri kuglice, postupak je završen. Stanje: prva kutija sadrži dve kuglice, druga je prazna, treća sadrži jednu, a četvrta dve kuglice.*

Dakle, broj 11 *prikazali smo u bazi* 3/2 *koristeći dopuštene cifre* 0, 1 *i* 2*:*

$$N = (2102)_{3/2} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 11.$$

Probaćemo sada drugi pristup, nađimo $d_k \in \{0, 1, 2\}$, $k = 0, 1, 2, 3$, *tako da:*

$$11 = d_3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + d_2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + d_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 + d_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0.$$

Množenjem sa 8 *dobijamo* $88 = 8d_0 + 12d_1 + 18d_2 + 27d_3$. *Cifra* d_3 *mora biti parna, tj.* $d_3 = 2$ *i ostaje* $17 = 4d_0 + 6d_1 + 9d_2$. *Cifra* d_2 *mora biti neparna tj.* $d_2 = 1$ *i ostaje* $4 = 2d_0 + 3d_1$, *tj.* $d_1 = 0$ *i* $d_0 = 2$.

Ovu bazu prvi je uveo Kempner[18] 1936. Koristeći racionalne baze, Bili Dormini, tada šesnaestogodišnjak, izumeo je 2007. godine jedan metod enkripcije ([2]) za koji je dobijao nagrade, pokazavši da brojevni sistemi sa racionalnom bazom imaju važne praktične primene.

[18] Aubrey John Kempner (1880–1973), američki matematičar engleskog porekla

3.4 Bijektivni sistemi sa bazom k

Brojevni sistem kod kojeg se svaki prirodan broj može na jedinstven način prikazati konačnim nizom *nenula* cifara je **bijektivni brojevni sistem**. Unarni brojevni sistem jeste bijektivan, dok uobičajeni dekadni sistem to nije, zato što npr. broj 5 možemo prikazati na razne načine 5, 05, 005, ... (samo prvi zapis je uobičajen!).

Bijektivni sistem sa bazom k (gde je $k > 1$ prirodan broj) koristi cifre $1, 2, ..., k$ za prikaz prirodnih brojeva. Pozicija cifre određuje njenu vrednost kao umnožak stepena od k.

Primer 3.4. *Pokazaćemo razliku između binarnog i bijektivnog sistema sa bazom 2 ("prazan string" označavaćemo sa λ):*

binarni	0	1	10	11	100	101	110	111
bijektivni − 2	λ	1	2	11	12	21	22	111

Ukoliko se koristi bijektivni sistem sa bazom 10, potrebno je uvesti neki simbol za cifru 10, i obično se za to uzima A. Dakle, skup $\mathbb{N}_0$ je

$$\lambda, 1, 2, ..., 9, A, 11, 12, ..., 19, 1A, ..., 99, 9A, A1, ...$$

Mnoge proračunske tabele (eng. spreadsheet), kao npr. Microsoft Excel, koriste bijektivni sistem sa bazom 26 u kojoj su simboli uobičajenim redom uzeta slova abecede, $A, B, ..., Z$. Ovde brojanje ide na sledeći način:

$$A, B, C, ..., Y, Z, AA, AB, ..., AY, AZ, BA, BB, ..., BZ, ...$$

Primer 3.5. $BEB = 2 \cdot 26^2 + 5 \cdot 26^1 + 2 \cdot 26^0 = 1484$

Činjenica da svaki prirodan broj u bijektivnom sistemu sa bazom k ($k \geq 1$) ima jedinstveno predstavljanje otkrivana je više puta, npr. Foster 1947. (za $k = 10$), Smullyan 1961. i Böhm 1964. (za sve $k \geq 1$).

U astronomiji, jedna varijanta Bajerovog sistema koristi se za davanje imena promenljivim zvezdama[19]. Pravila su sledeća:

- Zvezde koje već imaju u nazivu grčko slovo ne dobijaju novu oznaku
- U suprotnom, prvih devet počinju od slova R i idu do Z

[19]To su zvezde čija se promena sjaja može uočiti tokom kratkog vremenskog intervala a nije uzrokovana promenama u zemljinoj atmosferi, videti [29]

- Kod narednih 45 nastavlja se sa $RR, ..., RZ, SS, ..., SZ, TT, ..., TZ, ...$ do poslednjeg ZZ

- Koriste se potom $AA...AZ, BB...BZ, CC...CZ$ itd. dok se ne stigne do QZ, s tim što se izostavlja J i sa prvog i sa drugog mesta zbog vizuelne sličnosti sa slovom I

- Posle $334(= 25 \times 26/2 + 9)$ kombinacija napuštaju se latinična slova i počinje imenovanje zvezda sa $V335, V336$ itd.

- Drugo slovo nikad nije bliže početku alfabeta od prvog, tj. nijedna zvezda ne može biti CA i slično.

Primer 3.6. *Kao ilustracija gorenavedenih pravila neka posluže sledeći nazivi: δ Cephei, R Coronae Borealis, YZ Ceti, $V603$ Aquilae.*

3.5 Brojevni sistemi sa negativnom bazom

Za bazu brojevnog sistema može se uzeti $b = -r$, gde je $r \geq 2$ prirodan broj. Uobičajeno se ime pozicionom brojevnom sistemu sa negativnom osnovom dobija dodavanjem prefiksa "nega-" na ime odgovarajućeg brojevnog sistema sa pozitivnom osnovom, npr. negabinarni, negadekadni itd. Negativne baze prvi je 1885. posmatrao Grunvald[20].

Dakle,

$$n = \sum_{i=0}^{n} d_i(-r)^i = d_n d_{n-1}...d_1 d_0,\ d_k \in \{0, 1, ..., r-1\},\ d_n \neq 0 \text{ (osim za } n = 0)$$

Za razliku od sistema sa pozitivnom bazom, kod kojih celi brojevi i razlomci čiji je zapis u toj bazi konačan nemaju jedinstveno predstavljanje (npr. $1 = 0.999...$ u dekadnom sistemu), kod negativne baze svaki ceo broj ima jedinstveno predstavljanje. Ipak, postoje racionalni brojevi koji nemaju jedinstveno predstavljanje, npr. kod negaternarne baze $b = -3$

$$1,\overline{02}_{-3} = \frac{5}{4} = 2,\overline{20}_{-3}.$$

[20]Vittorio Grünwald (1855-1943), italijanski matematičar i profesor nemačkog jezika

Zaista, koristeći elementarna svojstva konvergentnog geometrijskog reda,

$$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{9-1} = 1 + \frac{2}{9(1-\frac{1}{9})} = 1 + \frac{2}{9} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{9^{k+1}} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(-3)^{2(k+1)}} = 1 + \frac{2}{(-3)^2} + \frac{2}{(-3)^4} + ... = (1,0202...)_{-3}$$

$$\frac{5}{4} = 2 + \frac{-3}{4} = 2 + (-3) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(-3)^{2(k+1)}} = 2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3)^{2(k+1)}} =$$

$$= 2 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{2k+1}} = 2 + \frac{2}{(-3)^1} + \frac{2}{(-3)^3} + ... = (2,2020...)_{-3}$$

Konverzija u negativnu bazu $-r$ obavlja se uzastopnim deljenjem sa $-r$, zapisivanjem nenegativnih ostataka (iz skupa $\{0, 1, ..., r-1\}$) i njihovim nadovezivanjem u obrnutom redosledu. Napomenimo da moramo odabrati celobrojni količnik tako da ostatak bude nenegativan i minimalan.

Primer 3.7. *Konvertujemo broj 97 u negaternarnu bazu* $(b = -3)$

$$\begin{aligned} 97 &= (-3) \cdot (-32) + 1 \\ -32 &= (-3) \cdot 11 + 1 \\ 11 &= (-3) \cdot (-3) + 2 \\ -3 &= (-3) \cdot 1 + 0 \\ 1 &= (-3) \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

Dakle, $97 = 10211_3$. *Provera:* $1 \cdot (-3)^4 + 0 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 + 1 \cdot (-3)^1 + 1 \cdot (-3)^0 = 97$

Konvertujemo sada broj -97 *u negaternarnu bazu:*

$$\begin{aligned} -97 &= (-3) \cdot 33 + 2 \\ 33 &= (-3) \cdot (-11) + 0 \\ -11 &= (-3) \cdot 4 + 1 \\ 4 &= (-3) \cdot (-1) + 1 \\ -1 &= (-3) \cdot 1 + 2 \\ 1 &= (-3) \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

Dakle, $-97 = 121102_3$. *Provera:* $1 \cdot (-3)^5 + 2 \cdot (-3)^4 + 1 \cdot (-3)^3 + 1 \cdot (-3)^2 + 0 \cdot (-3)^1 + 2 \cdot (-3)^0 = -97$

Ovim primerom ilustrovali smo jednu od prednosti sistema sa negativnom bazom: nije potrebno koristiti minus znak za negativne brojeve. Njegov osnovni nedostatak je povećanje složenosti aritmetičkih operacija.

Negabinarni brojevi implementirani su kod ranih poljskih računara BINEG i UMC, sagrađenih 1957–59, zasnovanih na idejama Pavlaka[21] i Lazarkieviča sa varšavskog matematičkog instituta.

3.6 Sistemi sa imaginarnom bazom

Donald Knut je 1960. [10] predložio sistem sa imaginarnom bazom $b = 2i$ ("quater-imaginary"). Zašto baš $2i$? Samo i ne bi moglo da bude osnova, jer $i^n \in \{\pm 1, \pm i\}$, a broj 2 je tu kao sledeći prirodan broj. U njemu skoro svaki kompleksan broj ima jedinstveno predstavljanje uz korišćenje samo cifara $\{0, 1, 2, 3\}$. Kao cifre u bazi bi koriste se $0, 1, ..., b^2 - 1$.

Da bismo bolje razumeli ovaj sistem, posmatrajmo najpre pozitivne i negativne stepene osnove:

$$..., (2i)^{-4} = \frac{1}{16},\ (2i)^{-3} = \frac{i}{8},\ (2i)^{-2} = -\frac{1}{4},\ (2i)^{-1} = -\frac{i}{2},$$
$$(2i)^0 = 1,\ (2i)^1 = 2i,\ (2i)^2 = -4,\ (2i)^3 = -8i,\ (2i)^4 = 16, ...$$

Prilikom prevođenja kompleksnog broja z iz dekadne osnove u sistem sa osnovom $2i$, preduzimamo sledeće korake:

- konvertujemo realni deo $Re(z)$ datog kompleksnog broja
- konvertujemo imaginarni deo $iIm(z)$ datog kompleksnog broja
- isprepletamo dobijene cifre

Primer 3.8. *Konvertujemo kompleksan broj $z = -1 + 4i$ u bazu $b = 2i$. Kako je $-1 = 3 - 4 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 3 \cdot (2i)^0 + 1 \cdot (2i)^2$ imamo $-1 = 103_{2i}$. Sada konvertujemo imaginarni deo: $4i = 2 \cdot 2i$, pa je $4i = 20_{2i}$. Dakle, $-1 + 4i = 103_{2i} + 20_{2i} = 123_{2i}$.*

Primer 3.9. *Potražimo zapis imaginarne jedinice u osnovi $2i$.*

$$\begin{aligned} i &= ...d_3 d_2 d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} ... = \\ &= ... + (-8i)d_3 + (-4)d_2 + (2i)d_1 + d_0 + d_{-1}\frac{-i}{2} + d_{-2}\frac{-1}{4} + d_{-3}\frac{i}{8} + ... \end{aligned}$$

[21] Zdzisław I. Pawlak (1926–2006), poljski matematičar i informatičar

Kako je realni deo nula, uzimamo da $d_{2k} = 0,\ k \in \mathbb{Z}$. *Dakle, treba naći cifre tako da:*

$$1 = ... + (-8)d_3 + 2d_1 - \frac{d_{-1}}{2} + \frac{d_{-3}}{8} + ...,$$

uz ograničenje da su sve cifre iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$. *Vidimo da je najjednostavnije rešenje* $d_1 = 1,\ d_{-1} = 2$, *tako da* $i = 10, 2_{2i}$.

Sa imaginarnom bazom blisko je povezan pojam krivih oblika Z (*eng.* $Z-$*order curve*). U pitanju su krive koje preslikavaju višedimenzionalni niz podataka u jednu dimenziju, pritom čuvajući lokalnost tačaka podataka. Prvi put ih je predstavio Morton 1966. Jedna od važnijih primena je u Štrasenovom algoritmu za množenje velikih matrica koji je brži od uobičajenih postupaka.

3.7 Sistemi sa kompleksnom bazom $(-1 \pm i)$

Bazu $-1 \pm i$, uz korišćenje cifara 0 i 1, predložili su S. Khmelnik 1964. i W. F. Penney 1965.

U opštem slučaju, kompleksan broj x u pozicionom brojevnom sistemu sa kompleksnom bazom ρ (gde $|\rho| > 1$) predstavlja se razvojem

$$x = \pm \sum_{\nu} x_\nu \rho^\nu,$$

gde su x_ν cifre iz konačnog skupa Z i obično $|x_\nu| < |\rho|$. Standardni skup cifara obično zapisujemo kao $\{0, 1, 2, ..., |Z| - 1\}$. Za predstavljanje realnih brojeva minimalni skup cifara je $\{0, 1, ..., |\rho| - 1\}$, a za kompleksne to je skup $\{0, 1, ..., |\rho|^2 - 1\}$.

Pozicioni brojevni sistem se može posmatrati kao uređeni par $\langle \rho, Z \rangle$ sa bazom ρ i skupom cifara Z.

Primer 3.10. *Ukoliko posmatramo bazu* $b = -1 + i$, *zbog* $|b| = \sqrt{2}$ *vidimo da su dopuštene samo cifre* 0 *i* 1. *Niz cifara* 1100 *u ovoj bazi predstavlja broj* 2, *jer*

$$(1100)_{-1+i} = 1 \cdot (-1 + i)^3 + 1 \cdot (-1 + i)^2 + 0 \cdot (-1 + i)^1 + 0 \cdot (-1 + i)^0 = 2.$$

Primer 3.11. *Ukoliko posmatramo bazu* $b = -3 + i$, *zbog* $|b|^2 = 10$ *vidimo da su dopuštene cifre* $0, 1, 2, ..., 9$. *Niz cifara* 1443 *u ovoj bazi predstavlja broj* $5 + 6i$, *jer*

$$(1443)_{-1+i} = 1 \cdot (-3 + i)^3 + 4 \cdot (-3 + i)^2 + 4 \cdot (-3 + i)^1 + 3 \cdot (-3 + i)^0 = 5 + 6i.$$

Čitaocu se preporučuje [3], gde je između ostalog uspostavljena veza predstavljanja broja u kompleksnoj bazi sa fraktalom poznatim kao "Twin-dragon". U [7] može se naći nešto više o bazama oblika $b = -n + i$ gde je n prirodan broj, kao i primeri računanja.

3.8 Brojevni sistem sa iracionalnom algebarskom bazom φ (finarni sistem)

3.8.1 Zlatni presek i Fibonačijevi brojevi

Podsetimo, dve pozitivne veličine a i b (neka $a > b$) kaže se da su u zlatnom preseku ukoliko se njihov zbir prema većoj odnosi kao veća prema manjoj:

$$(a + b) : a = a : b.$$

Taj odnos označava se obično malim grčkim slovom φ ("fi"), u čast slavnog starogrčkog skulptora Fidije. Iz same definicije sledi $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, odnosno φ je veće od dva rešenja algebarske jednačine $x^2 - x - 1 = 0$, tj.

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Nije teško pokazati da je algebarski broj φ iracionalan.

Sa zlatnim presekom blisko je povezan pojam Fibonačijevih brojeva. To je niz brojeva koji se induktivno definiše na sledeći način:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n = 2, 3, ...$$

Dakle, svaki broj u nizu dobija se kao zbir prethodna dva:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Koristeći relaciju $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ Fibonačijev niz može se produžiti i na negativne cele brojeve:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n,$$

tako da niz postaje

$$..., -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Teorema 3.1. *Za Fibonačijeve brojeve F_n važi:*

1. $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi, \; \varphi^n = F_{n+1} + F_n\varphi^{-1}$
2. $F_{-2k} = -F_{2k}, \; F_{-(2k+1)} = F_{2k+1}$

3.8.2 Finarni brojevni sistem

Konstantu zlatnog preseka φ kao bazu prvi posmatrao Bergman 1957. u [1], kad je imao samo 12 godina! Kod sistema sa necelobrojnom bazom b cifre idu od 0 do $\lfloor b \rfloor$, te se u ovoj bazi koriste samo dva različita simbola, cifre 0 i 1. Podsetimo na osnovnu relaciju koja karakteriše broj φ:

$$\varphi^2 = \varphi + 1, \qquad \text{i.e.} \qquad \varphi - \frac{1}{\varphi} = 1.$$

Teorema 3.2 ([20])**.** *Za svaki prirodan broj n postoji konačan niz različitih celih brojeva $k_1, k_2, ..., k_m$ tako da*

$$n = \varphi^{k_1} + \varphi^{k_2} + ... + \varphi^{k_m}.$$

Ova teorema u stvari tvrdi da se svaki ceo broj može predstaviti u bazi φ, tj. u *finarnom* brojevnom sistemu. To predstavljanje uglavnom nije jedinstveno, jer zbog osobine $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ niz cifara u kojem se javljaju dve uzastopne cifre 1 možemo zameniti na sledeći način: $011 = 100$; ovo je tzv. redukcija jedinice.

Primer 3.12. *Množeći $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ i $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$ lako dobijamo $1 = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}$, tj. $1 = 0,11_\varphi$. Primenom redukcije jedinica, dobijamo da $1 = 0,11_\varphi = 1,00_\varphi$, što je i očekivano.*

Uzastopnom primenom redukcije jedinica na grupu cifara 11 koja se nalazi krajnje levo, dobija se zapis u kojem neće biti uzastopnih jedinica, tj. dolazimo do minimalne reprezentacije koja je jedinstvena. To je zapis broja u kojem ima najmanje pojavljivanja cifre 1.

Primenom pravila koje grupu cifara 100 menja sa 011 (tzv. ekspanzija jedinice), može se dobiti predstavljanje broja koje ima beskonačno dug "rep", npr.

$$2 = 10,01_\varphi = 10,0100_\varphi = 10,0011_\varphi = 10,001100_\varphi = 10,001011_\varphi = ...$$

Predstavljanje koje se ne završava sa 011 i ima najveći broj jedinica naziva se maksimalna reprezentacija, i ona je jedinstvena.

Primer 3.13. *Među raznim reprezentacijama broja 9 u finarnoj bazi posebno se ističu minimalna* $10010,0101$ *i maksimalna,* $1101,101111$. *Zadatak za čitaoca je da nađe bar još jedno predstavljanje.*

Iskoristićemo postupak opisan u sekciji 3.1 ($\beta-$razvoj) da pokažemo kako se na primer broj 5 predstavlja u bazi φ. Primetimo najpre da:

$$\varphi^{-3} \approx 0,236, \varphi^{-2} \approx 0,382, \varphi^{-1} \approx 0,618, \varphi \approx 1,618, \varphi^{2} \approx 2,618, \varphi^{3} \approx 4,236.$$

Za početak, vidimo da $\varphi^3 < 5 < \varphi^4$. Zato stavljamo:

$$d_3 = \left\lfloor \frac{5}{\varphi^3} \right\rfloor = \lfloor 1,18034... \rfloor = 1,\ r_3 = \left\{ \frac{5}{\varphi^3} \right\} = \{1,18034...\} = 0,18034...$$

Sada nalazimo i ostale cifre (uzimamo φ na 6 decimala):

$$\begin{aligned}
d_2 &= \lfloor \varphi \cdot r_3 \rfloor = 0,\ r_2 = \{\varphi \cdot r_3\} = \{0,291796...\} = 0,291796...\\
d_1 &= \lfloor \varphi \cdot r_2 \rfloor = 0,\ r_1 = \{\varphi \cdot r_2\} = \{0,472136...\} = 0,472136...\\
d_0 &= \lfloor \varphi \cdot r_1 \rfloor = 0,\ r_0 = \{\varphi \cdot r_1\} = \{0,763932...\} = 0,763932...\\
d_{-1} &= \lfloor \varphi \cdot r_0 \rfloor = 1,\ r_{-1} = \{\varphi \cdot r_0\} = \{1,236068...\} = 0,236068...\\
d_{-2} &= \lfloor \varphi \cdot r_{-1} \rfloor = 0,\ r_{-2} = \{\varphi \cdot r_{-1}\} = \{0,381966...\} = 0,381966...\\
d_{-3} &= \lfloor \varphi \cdot r_{-2} \rfloor = 0,\ r_{-3} = \{\varphi \cdot r_{-2}\} = \{0,618034...\} = 0,618034...\\
d_{-4} &= \lfloor \varphi \cdot r_{-3} \rfloor = \lfloor 0,999999... \rfloor = 1,\ r_{-4} = \{\varphi \cdot r_{-3}\} = \{0,999999...\} = 0
\end{aligned}$$

Dakle, $5 = 1000,1001_{\varphi}$. Da bi još bolje uočio numeričke probleme vezane za iracionalnost baze, čitaocu se preporučuje primena gornjeg algoritma ako se uzima φ na 3 decimale!

Teorema 3.3 ([6])**.** *Za neuzastopne cele brojeve $a_1, ..., a_k$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. $mF_n = F_{n+a_1} + F_{n+a_2} + ... + F_{n+a_k}$
2. $m = \varphi^{a_1} + \varphi^{a_2} + ... + \varphi^{a_k}$

Ova teorema u stvari tvrdi da se koeficijenti u identitetu 1 (zapis mF_n preko niza Fibonačijevih brojeva) poklapaju sa jedinstvenim zapisom broja m u standardnoj formi u finarnoj bazi.

Algoritamski postupak zasniva se na uzastopnoj primeni sledećih pravila:

1. "inicijalizacija α":
$$\alpha = \frac{\alpha\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{\alpha\varphi + \alpha}{\varphi^2}$$
Ovaj brojilac zvaćemo "izraz u fokusu"; obično je u složenom izrazu to deo skroz gore desno

2. "redukcija$-\beta_i$":

$$a\varphi + b = \varphi^{\beta_i+1} + ((a - F_{\beta_i})\varphi + (b - F_{\beta_i-1}))$$

3. "pomeraj":

$$\varphi^k + (a\varphi + b) = \varphi^k + \frac{a\varphi^2 + b\varphi}{\varphi} = \varphi^k + \frac{(a+b)\varphi + a}{\varphi}.$$

Algoritamski postupak izgleda ovako: inicijalizacija α, redukcija$-\beta_1$, zatim niz od $k_1 \geq 1$ pomeraja, potom opet redukcija$-\beta_2$, niz od $k_2 \geq 1$ pomeraja,..., redukcija$-\beta_n$, niz od $k_n \geq 1$ pomeraja, i konačno, evaluacija. Ovaj metod ilustrujemo u narednom jednostavnom primeru.

Primer 3.14.

$$4 = \frac{4\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{4\varphi + 4}{\varphi^2} = \frac{\varphi^4 + (\varphi + 2)}{\varphi^2} = \frac{\varphi^4 + \dfrac{\varphi^2 + 2\varphi}{\varphi}}{\varphi^2} =$$
$$= \frac{\varphi^4 + \dfrac{3\varphi + 1}{\varphi}}{\varphi^2} = \frac{\varphi^4 + \dfrac{\varphi^3 + \varphi}{\varphi}}{\varphi^2} = \varphi^2 + \varphi^0 + \varphi^{-2}$$

Ovde se redom koriste: inicijalizacija 4, *redukcija*-3, *pomeraj, redukcija*-2 *i evaluacija.*

Primer 3.15. *U ovom primeru videćemo da u nekim međukoracima mogu da se jave i negativne vrednosti, a da algoritam ipak uspešno reši problem.*

$$7 = \frac{7\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{7\varphi + 7}{\varphi^2} = \frac{\varphi^6 + (-\varphi + 2)}{\varphi^2} = \frac{\varphi^6 + \dfrac{-\varphi^2 + 2\varphi}{\varphi}}{\varphi^2} =$$
$$= \frac{\varphi^6 + \dfrac{\varphi - 1}{\varphi}}{\varphi^2} = \frac{\varphi^6 + \dfrac{\dfrac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi}}{\varphi}}{\varphi^2} = \frac{\varphi^6 + \dfrac{\dfrac{1}{\varphi}}{\varphi}}{\varphi^2} = \varphi^4 + \varphi^{-4}$$

Ovde se redom koriste: inicijalizacija 7, *redukcija*-5, *pomeraj, redukcija*-2 *i evaluacija.*

Prilikom izvođenja osnovnih računskih radnji sa brojevima u finarnoj bazi, koriste se dva pristupa. Kod prvog se ceo račun obavlja bez prenosa i pozajmljivanja (ali uz korišćenje još nekih cifara osim 0 i 1), pa se tek na kraju konvertuje rezultat u odgovarajući oblik, dok drugi pristup koristi isključivo dopuštene cifre 0 i 1 uz reorganizaciju operanada tako da se izbegne pojavljivanje cifara 1 na mestu sa istom težinom.

Primer 3.16.

$$2 + 3 = 10,01 + 100,01 = 110,02 = 110,0111 = 110,1001 = 1000,1001$$
$$2 + 3 = 10,01 + 100,01 = 10,0011 + 100,01 = 110,0111$$

Opširnije o aritmetičkim operacijama u finarnoj bazi može se naći npr. u [1].

Neke osobine: Primetimo da $1 = 0,\overline{10}$, iako su oba broja u standardnom obliku. Ovu činjenicu možemo pokazati na bar dva načina:

- $1 = 0,11_\varphi = 0,1011_\varphi = 0,101011_\varphi = ...$, gde smo koristili osobinu $100_\varphi = 011_\varphi$
- $1,\overline{01}_\varphi = 1 + \varphi^{-2} + \varphi^{-4} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{-2k} = \frac{1}{1-\varphi^{-2}} = \varphi = 10_\varphi$ (koristili smo sumu geometrijskog reda), i sad deljenjem sa φ sledi zaključak.

I ne samo ovo, svaki broj koji se završava cifrom 1 jednak je broju kod kojeg je ta cifra 1 zamenjena ponavljajućom grupom cifara 01. Ovo je osobenost finarnog sistema, kao što u dekadnom sistemu npr. $1 = 0,999...$

Zapis racionalnog broja $\frac{1}{2}$ dobijamo na sledeći način:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + (\varphi - \varphi^{-1})} = \frac{1}{(1 + \varphi) - \varphi^{-1}} = \frac{1}{\varphi^2 - \varphi^{-1}} = \frac{1}{\varphi^2(1 - \varphi^{-3})} =$$
$$= \varphi^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{-3k} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{-3k-2} = 0,010010010..._\varphi = 0,\overline{010}_\varphi.$$

Vidimo da je u pitanju zapis u kojem se ponavlja grupa cifara u razlomljenom delu, što je i očekivano, jer svojstvo racionalnosti ne zavisi od baze. Primetimo i da iracionalni broj $\sqrt{5}$ ima zapis $10,1_\varphi$, zato što je $\varphi + \varphi^{-1} = \sqrt{5}$. S druge strane,

$$\sqrt{2} \approx 1,0100\ 0001\ 0100\ 1010\ 0100\ 0000\ 0101\ 0000\ 0000\ 0101..._\varphi$$

4 Ekonomičnost brojevnog sistema i brojevni sistem sa transcendentnom bazom e

Primetimo najpre da je najveći broj koji se može predstaviti sa d cifara u bazi b broj $b^d - 1$, tako da ukoliko je broj N predstavljen sa d cifara u bazi b mora biti $N \leq b^d - 1$. Broj cifara potrebnih za predstavljanje broja N u bazi b je bar $\log_b(N+1)$.

Ekonomičnost baze za neki broj N u bazi b definiše se kao

$$E(b, N) = b \cdot \lfloor \log_b N + 1 \rfloor.$$

Ako su i b i N pozitivni, tada je $E(b, N)$ jednak proizvodu baze i broja cifara potrebnih da se izrazi broj N u bazi b. Drugim rečima, $E(b, N)$ meri cenu čuvanja ili obrade broja N u bazi b ako je cena za svaku od cifara proporcionalna b.

Primer 4.1. *Kako* $100 = 1100100_2 = 10201_3 = 1210_4 = 144_8 = 64_{16}$*, vidimo da u bazi* 2 *treba čak* 7 *cifara (svaka je* 0 *ili* 1*), dok u bazi* 16 *koristimo samo dve cifre, od kojih svaka može da uzima jednu od 16 vrednosti.*

Koristeći poznatu osobinu logaritma, $\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}$, vidimo da se za dovoljno veliko N ekonomičnost baze ponaša asimptotski kao

$$E(b, N) \sim \frac{b}{\ln b} \ln N$$

Teorema 4.1. *Baza e ima najmanju ekonomičnost baze.*

Dokaz. Funkcija $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ je strogo opadajuća za $1 < x < e$ i strogo rastuća za $x > e$; dakle, za $x > 1$ minimum se dostiže u e. Prema tome, za fiksirano N, prema proceni

$$E(b, N) \sim b \log_b N = b \frac{\ln N}{\ln b},$$

sledi da se minimum dostiže za $b = e$. □

Posledica 4.1. *Najekonomičnija celobrojna baza je za* $b = 3$*.*

Zaista, kako je $2/\ln 2 \approx 2.89 > 3/\ln 3 \approx 2.73$, lako sledi zaključak.

Za dovoljno veliko N možemo uporediti dve baze, b_1 i b_2, na sledeći način:

$$\frac{E(b_1, N)}{E(b_2, N)} \sim \frac{b_1 \log b_1 N}{b_2 \log b_2 N} = \frac{b_1 \ln b_2}{b_2 \ln b_1}.$$

5 Neki mešoviti brojevni sistemi

Neka je dat niz brojeva $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Definišemo:

$$\begin{bmatrix} ..., d_3, d_2, d_1, d_0; d_{-1}, d_{-2}, ... \\ ..., b_3, b_2, b_1, b_0; b_{-1}, b_{-2}, ... \end{bmatrix} := ... + d_3 \cdot b_2 b_1 b_0 + d_2 \cdot b_1 b_0 + d_1 \cdot b_0 + d_0 + \frac{d_{-1}}{b_{-1}} + \frac{d_{-2}}{b_{-1} b_{-2}} + ...$$

Kod najjednostavnijih sistema uzima se da su $b_0, b_1, ...$ prirodni brojevi, radi se samo do "decimalne" tačke i zahteva se da cifre zadovoljavaju uslov $0 \leq d_k < b_k,\ k \in \mathbb{Z}$. Često se posmatraju i tzv. težine, definisane sa:

$$\pi_0 = 1, \qquad \pi_k := b_0 \cdot b_1 \cdot ... \cdot b_{k-1},\ \pi_{-k} := (b_{-1} \cdot ... \cdot b_{-k})^{-1}.$$

Na ovaj način dobijamo kompaktniji zapis gde je uočljivija analogija sa običnim pozicionim brojevnim sistemima:

$$\begin{bmatrix} ..., d_3, d_2, d_1, d_0; d_{-1}, d_{-2}, ... \\ ..., b_3, b_2, b_1, b_0; b_{-1}, b_{-2}, ... \end{bmatrix} := \sum_k d_k \pi_k.$$

Ovde je pogodno koristiti neki separator i za različite cifre, recimo zarez ili dvotačku, dok umesto "decimalne" tačke možemo koristiti tačku i zarez. Zapete između celih brojeva mogu se ali ne moraju koristiti u okviru predstavljanja broja, ali se koriste pri definisanju baze. Dakle,

$$x = d_3, d_2, d_1, d_0; d_{-1}, d_{-2}, ...$$

Ukoliko su svi b_k međusobno jednaki (nekom b), onda je $\pi_k = b^k$ i svodi se na običan pozicioni sistem.

Primer 5.1. *Mešoviti brojevni sistemi koriste se u svakodnevnom životu:*

- *Vreme najčešće izražavamo preko dan-sat-minut-sekund-stotinka, tj. kao sistem*
$$\begin{bmatrix} d_3, & d_2, & d_1, & d_0; & d_{-1} \\ \infty, & 24, & 60, & 60; & 100 \end{bmatrix}$$
- *Pre decimalizacije, u Ujedinjenom kraljevstvu korišćene su jedinice funta, šiling i peni; jedna funta sadrži* 20 *šilinga, a jedan šiling* 12 *penija. To je sistem*
$$\begin{bmatrix} d_2, & d_1, & d_0 \\ \infty, & 20, & 12 \end{bmatrix}$$
Slično važi i za anglosaksonske mere za dužinu (milja ima 1760 *jardi, jard* 3 *stope, a stopa* 12 *inča), masu (jedna funta ima* 16 *unci), itd.*

Primer 5.2. *Broj* $(211.)_a$ *u bazi* $a = (4, 3, 2.)$ *je* 15*, jer:* $m_0 = 2$*,* $m_1 = 3$*,* $m_2 = 4$*, pa je* $\pi_0 = 1$*,* $\pi_1 = m_0 = 2$*,* $\pi_2 = m_0 m_1 = 6$*,* $\pi_3 = m_0 m_1 m_2 = 24$*, tako da*

$$d_0\pi_0 + d_1\pi_1 + d_2\pi_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 15.$$

Broj $(131.)_b$ *u bazi* $b = (3, 4, 2.)$ *je takođe* 15*, jer:* $m_0 = 2$*,* $m_1 = 4$*,* $m_2 = 3$*, pa je* $\pi_0 = 1$*,* $\pi_1 = m_0 = 2$*,* $\pi_2 = m_0 m_1 = 8$*,* $\pi_3 = m_0 m_1 m_2 = 24$*, tako da*

$$d_0\pi_0 + d_1\pi_1 + d_2\pi_2 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 8 = 15.$$

Krajnje levo nenula cifra naziva se najznačajnija cifra, a sve cifre desno od nje su značajne. Ako je s broj značajnih cifara celog broja x, tada važi $\pi_{s-1} \leq x \leq \pi_s - 1$.

Predstavljamo algoritam za jednostavniji slučaj, za određivanje cifara broja x u datoj bazi $b = (b_0, b_1, ..., b_{n-1})$:

1. Deli se x sa b_0. Količnik je q_1 a ostatak d_0^x
2. Deli se q_1 sa b_1. Količnik je q_2 a ostatak d_1^x
3. Deli se q_2 sa b_2. Količnik je q_3 a ostatak d_2^x
4. ...
5. Deli se q_{s-1} sa b_{s-1}. Količnik je 0 a ostatak d_{s-1}^x

Dakle, $x = (d_{s-1}^x : ... : d_1^x : d_0^x)_b$.

Primer 5.3. *Predstavimo broj 115 u bazi* $b = (5, 4, 3, 2.)$*. Kako je* $\pi_0 = 1$*,* $\pi_1 = 2$*,* $\pi_2 = 6$*,* $\pi_3 = 24$*,* $\pi_4 = 120$*, algoritam daje:*

$$\begin{aligned} 115 &= 2 \cdot 57 + 1 \\ 57 &= 3 \cdot 19 + 0 \\ 19 &= 4 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 5 \cdot 0 + 4 \\ 115 &= (4301.)_b \end{aligned}$$

Primer 5.4. *Neka je data mešovita baza* $b = (3, 5, 4, 4, 3, 2)$ *i dva broja* $\alpha = (243211)_b$ *i* $\beta = (143320)_b$*. Njihov zbir nalazimo na sledeći način,* *vodeći računa o prenosu iz jedne baze u susednu levu:*

baza		3	5	4	4	3	2
prenos	1	1	1	1	1	0	0
α		2	4	3	2	1	1
β		1	4	3	3	2	0
$\alpha + \beta$	1	1	4	3	2	0	1

Naravno, svaki osnovnoškolski zadatak gde je potrebno sabirati ili oduzimati uglove date u stepenima, minutima i sekundama predstavlja lep primer računanja sa mešovitom bazom.

Sisteme sa mešovitom bazom prvi je izučavao Kantor još 1869. Čitaocu kojeg je ovo zaintrigiralo preporučuje se [5].

5.1 Faktorijelni sistem

Ukoliko se stavi $b_k = k+2$, dobija se tzv. faktorijelni sistem u kojem je svaki prirodan broj moguće predstaviti na jedinstven način kao

$$(d_n d_{n-1} ... d_1)_! = d_n \cdot n! + d_{n-1} \cdot (n-1)! + ... + d_2 \cdot 2! + d_1 \cdot 1!$$

gde $0 \leq d_k \leq k$ za $1 \leq k \leq n$ i $d_n \neq 0$.

Razlog za jedinstveno predstavljanje je taj što je suma proizvoda cifre i faktorijela uvek manja od narednog faktorijela, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Zaista, ako se primeti da $k \cdot k! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1)! - k!$, sumiranjem ostaju samo prvi i poslednji član, tj. $(n+1)! - 1$.

Primer 5.5. *Konvertujmo broj* 100 *u faktorijelni sistem. Metod se sastoji u uzastopnom celobrojnom deljenju sa* $1, 2, 3, ...$ *i beleženju ostataka, sve dok količnik ne postane nula:*

$$\begin{aligned} 100 &= 1 \cdot 100 + 0 \\ 100 &= 2 \cdot 50 + 0 \\ 50 &= 3 \cdot 16 + 2 \\ 16 &= 4 \cdot 4 + 0 \\ 4 &= 5 \cdot 0 + 4 \end{aligned}$$

Dakle, $100 = (4:0:2:0:0)_!$ *Zaista,* $4 \cdot 4! + 2 \cdot 2! = 100$.

Primer 5.6. *Koristeći elementarne operacije sa razlomcima odnosno razvoj funkcije e^x u Tejlorov red, vidimo da;*

$$\frac{1}{10} = \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!} = (0,00022)_!$$
$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = (10,01111...)_!$$

5.2 Primorijalni brojevni sistem

U teoriji brojeva, za $n-$ti prost broj p_n, **primorijal** $p_n\#$ se definiše kao proizvod prvih n prostih brojeva: $p_n\# := p_1 \cdot ... \cdot p_n$. Dakle, $p_1\# = 2$, $p_2\# = 2 \cdot 3 = 6$, $p_3\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, ...$ Uzima se $p_0\# = 1$, kao proizvod po praznom skupu.

Ukoliko se za mešovitu bazu sistema uzimaju redom prosti brojevi, a za njihove pozicije odgovarajući primorijali, dobija se primorijalni brojevni sistem, u kojem svaki prirodan broj ima jedinstveno predstavljanje, jer

$$\sum_{k=0}^{n} (p_{k+1} - 1) \cdot p_k\# = p_{n+1}\# - 1.$$

Primer 5.7. *Konvertujmo broj 100 u primorijalni sistem. Kako je*

$$\begin{aligned} 100 &= 2 \cdot 50 + 0 \\ 50 &= 3 \cdot 16 + 2 \\ 16 &= 5 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 7 \cdot 0 + 3 \end{aligned}$$

zaključujemo da $100 = (3:1:2:0)_\#$. *Zaista,* $3 \cdot 30 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 100$.

5.3 Rezidualni brojevni sistem

Predstavljanje celih brojeva njihovim vrednostima po modulu nekoliko po parovima prostih celih brojeva daje tzv. rezidualni brojevni sistem.

Rezidualni sistem određen je izborom po parovima uzajamno prostih celih brojeva $\{m_1, ..., m_n\}$ (koji se obično nazivaju modulima) sa proizvodom $M = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$ pošto svakom celom broju x sa segmenta $[0, M-1]$ dodeljuje skup $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ gde

$$x \equiv_{m_1} x_1,\ x \equiv_{m_2} x_2, ..., x \equiv_{m_n} x_n.$$

Kineska teorema o ostacima[22] garantuje jednoznačnost predstavljanja za broj iz opsega $[0, M-1]$. Glavni nedostaci su ograničen opseg brojeva koji se mogu predstaviti, kao i odsustvo efektivnih algoritama za računanje. Za više detalja, konsultovati [16].

Primer 5.8. *Pretpostavimo da su dati uzajamno prosti moduli* $\{8, 7, 5, 3\}$. *Broj* 100 *konvertujemo tako što redom upisujemo ostatke pri njegovom deljenju modulima:*

$$100 = 8 \cdot 12 + 4,\ 100 = 7 \cdot 4 + 2,\ 100 = 5 \cdot 20 + 0,\ 100 = 3 \cdot 33 + 1.$$

Dakle, $100 = (4:2:0:1)_{\{8,7,5,3\}}$.

Da bismo konvertovali ovaj broj natrag u dekadni, primetimo da

$$(4:2:0:1) = 4 \cdot (1:0:0:0) + 2 \cdot (0:1:0:0) + 1 \cdot (0:0:0:1).$$

Budući da je $(1:0:0:0) = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$, $(0:1:0:0) = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 120$, $(0:0:1:0) = 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$, $(0:0:0:1) = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$, *imamo:*

$$(4 \cdot 105 + 2 \cdot 120 + 0 \cdot 168 + 1 \cdot 280) \mod 840 = 940 \mod 840 = 100.$$

5.4 Fibonačijev brojevni sistem

Teorema 5.1 (Zekendorf). [23] *Svaki prirodan broj može se na jedinstven način izraziti kao suma Fibonačijevih brojeva u kojoj se ne pojavljuju nijedna dva uzastopna Fibonačijeva broja.*

Dokaz. Dokaz egzistencije radimo primenom transfinitne matematičke indukcije. Jasno je da $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ i $4 = F_2 + F_4 = 1 + 3$. Pretpostavimo sada da takva reprezentacija važi za sve prirodne brojeve ne veće od k, i pokažimo da važi i za $k+1$.

Ako je $k+1$ Fibonačijev broj, dokaz je gotov.

---

[22] Neka su $m_1, ..., m_k$ po parovima uzajamno prosti prirodni brojevi i neka su $a_1, ..., a_k$ proizvoljni celi brojevi. Tada postoji jedinstven po modulu $m_1 \cdot ... \cdot m_k$ broj x takav da $x \equiv_{m_1} a_i$ za sve $i = 1, ..., k$.

[23] Teorema nosi naziv po Zekendorfu (Edouard Zeckendorf, 1901–1983, belgijski lekar i matematičar amater) koji je objavio dokaz 1972, iako je do istog rezultata došao Lekerkerker (Cornelis Gerrit Lekkerkerker, 1922–1999, holandski matematičar) dvadeset godina ranije. Ne tako retka pojava da otkriće ne nosi ime po onom ko ga je prvi otkrio naziva se Stiglerov zakon eponimije.

Ako $k+1$ nije Fibonačijev broj, tada se on nalazi između dva Fibonačijeva broja, tj. postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da $F_j < k+1 < F_{j+1}$. Definišimo broj $a = k+1-F_j$. Kako je $a \leq k$, prema induktivnoj pretpostavci on ima reprezentaciju. Primetimo i da $a + F_j = k+1 < F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$, odakle $a < F_{j-1}$. To znači da reprezentacija broja a ne sadrži F_{j-1}, pa je $k+1 = F_j + a$ reprezentacija broja $k+1$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz jedinstvenosti: Neka je n prirodan broj koji ima dve različite reprezentacije kojima odgovaraju skupovi S i T. Definišemo $S' = S \setminus T$ i $T' = T \setminus S$, čime dobijamo disjunktne skupove. Kako su ovim oba skupa ostala bez istih elemenata, sume se ne menjaju:

$$\sum_{x \in S} x - \sum_{a \in S \cap T} a = \sum_{y \in T} y - \sum_{b \in S \cap T} b$$
$$\sum_{x \in S'} x = \sum_{y \in T'} y.$$

Ako su ili S' ili T' prazan skup, njihov doprinos sumi je nula, a kako su svi sabirci nenegativni i druga suma mora biti prazan skup, te je $S' = T' = \emptyset$ i $S = T$.

Pretpostavimo sada da ni S' ni T' nisu prazni. Označimo sa F_s odnosno F_t maksimalni element skupa S odnosno T, redom. Kako $S' \neq T'$, neka je bez umanjenja opštosti $F_s < F_t$. Poznato je da je zbir svih Fibonačijevih brojeva do F_n manji od F_{n+2}, te možemo reći da

$$\sum_{x \in S'} x < F_{s+1} \leq F_t.$$

Kako su sume po S' i T' nenegativne i jednake, došli smo do kontradikcije, te je $S' = T' = \emptyset$ i $S = T$. $\square$

Pomenimo još i to da je dokazano (David E. Daykin, 1960.) da je Fibonačijev niz jedini niz koji zadovoljava teoremu Zakendorfa.

Jedna važna primena je tzv. Fibonačijevo kodiranje (Alberto Apostolico i Aviezri Fraenkel, 1985.). Ideja je sledeća: simboli koji se češće pojavljuju kodiraju se (binarnim ciframa) sa manje bitova, i to tako što se $n-$ti simbol u nizu (po učestalosti, opadajuće) kodira Zekendorfovom reprezentacijom broja n (plus jedna jedinica da signalizira granice simbola). Na primer,

$$17 = 13 + 3 + 1 = F_6 + F_3 + F_1 = 100101.$$

Na primer (videti [26]), reč THEOREM se standardnim ASCII kodom zapisuje sa sedam osmobitnih reči, tj. 56 bitova. S druge strane, Fibonačijevo kodiranje daje 011|000011|11|1011|100011|11|1000011, dakle 30 bitova, pa je ušteda 46%.

Primer 5.9. *Jedna neobična primena Fibonačijevog brojevnog sistema je brzo približno pretvaranje kilometara u milje*[24] *i obratno. Kako je 8 kilometara približno 5 milja, a 5 i 8 su Fibonačijevi uzastopni brojevi, njihov količnik je približno φ, te ima približno φ kilometara u jednoj milji, i približno φ^{-1} milja u jednom kilometru.*

- *Ako zamenimo Fibonačijev broj kilometara prethodnim Fibonačijevim brojem, dobijamo približno broj milja; npr.* $13km \approx 8mi$.

- *Ako zamenimo Fibonačijev broj milja narednim Fibonačijevim brojem, dobijamo približno broj kilometara; npr.* $13mi \approx 21km$.

- *Ako broj kilometara nije Fibonačijev broj, predstavljamo ga kao sumu Fibonačijevih brojeva, a onda svaki broj iz sume zamenimo prethodnim Fibonačijevim brojem; npr.* $20km = 13km + 5km + 2km \approx 8mi + 3mi + 1mi = 12mi$.

- *Ako broj milja nije Fibonačijev broj, predstavljamo ga kao sumu Fibonačijevih brojeva, a onda svaki broj iz sume zamenimo narednim Fibonačijevim brojem; npr.* $20mi = 13mi + 5mi + 2mi \approx 21km + 8km + 3km = 32km$.

- *Napomenimo da nije neophodno koristiti Zekendorfovu reprezentaciju, već bilo kakvu sumu. Na primer,* $40km$ *je* $2 \cdot 20km$, *i kako već znamo da* $20km \approx 12mi$, *zaključujemo da* $40km \approx 24mi$.

6 Korisne naredbe iz paketa Mathematica

Cifre celog broja n u celobrojnoj bazi $b > 1$ (počevši od najznačajnije) nalaze se naredbom `IntegerDigits[n,b]`.

Zaista, `IntegerDigits[97,3]` daje $\{1, 0, 1, 2, 1\}$, što je u saglasnosti sa primerom 3.1.

Cifre u negativnoj bazi mogu se dobiti sledećim kodom ([24]):

[24] Jedna milja iznosi 1,609344 km

```
NegativeIntegerDigits[0, n_Integer?Negative] := {0}
NegativeIntegerDigits[i_, n_Integer?Negative] :=
Rest @ Reverse @ Mod[
NestWhileList[(# - Mod[#, -n])/n& ,
i, # != 0& ], -n]
```

`NegativeIntegerDigits[97,-3]` kao rezultat daje $\{1, 0, 2, 1, 1\}$, što je u skladu sa primerom 3.7.

Naredbom `IntegerDigits[n,MixedBasis[lista]]` koristi se mešovita baza sastavljena od baza datih u `lista`.

Naredba `IntegerDigits[100, MixedRadix[{6, 5, 4, 3, 2, 1}]]` daje $\{4, 0, 2, 0, 0\}$, što je u saglasnosti sa primerom 5.5.

Naredba `RealDigits[x,b]` daje listu cifara (počevši od najznačajnije) u zapisu realnog broja x u bazi b, čija dužina zavisi od tačnosti predstavljanja realnog broja. Za cele i racionalne brojeve sa konačnim nizom cifara iza "$b-$narne tačke" ova naredba vraća listu cifara, dok kod racionalnih brojeva sa ponavljajućom grupom cifara rezultat je oblika $\{a_1, a_2, ..., \{b_1, b_2, ...\}\}$ gde su a_i cifre pre grupe koja se ponavlja, a b_i cifre iz ponavljajuće grupe. U opštem slučaju, baza b ne mora da bude celobrojna.

Na primer, naredba `RealDigits[7, GoldenRatio, 10]` kao rezultat daje $\{\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\}, 5\}$; ovde broj 5 znači da zapis ima pet cifara levo od finarne tačke, što je saglasno sa primerom 3.15.

7 Umesto zaključka

Evo sada još jedna šala iz bogatog matematičkog folklora.

Pitanje: Zašto informatičari mešaju Noć veštica i Božić?
Odgovor: Zato što $31OCT = 25DEC$.
Komentar: Iako je "vic" koji treba objašnjavati obično baš zbog toga loš - ovde jeste potrebno objašnjenje, jer je u pitanju igra reči koja podrazumeva poznavanje običaja i kulture zapadnohrišćanske tradicije. Naime, Božić se po gregorijanskom kalednaru slavi 25. decembra, a Noć veštica 31. oktobra. Kako u engleskom jeziku skraćenica DEC može da znači i mesec decembar i dekadni brojevni sistem, a OCT i oktobar i oktalni brojevni sistem, $31OCT = 25DEC$ u stvari nema veze sa poklapanjem datuma, već sa činjenicom da $31_8 = 25_{10}$.

Za kraj, dopunjena verzija šale sa početka teksta – **Postoji 10 tipova ljudi na svetu: oni koji razumeju binarne brojeve, oni koji ih ne razumeju, i oni koji nisu shvatili da je ova šala bila za bazu 3**.

Autor koristi priliku da se zahvali profesoru Saši Vukašinoviću (OŠ "Vuk Karadžić", Surdulica) i docentu dr Milici Kolundžiji (PMF Niš, Departman za matematiku), koji su pažljivo pročitali jednu od verzija ovog teksta i svojim korisnim primedbama i sugestijama doprineli njegovoj razumljivosti.

Literatura

[1] G. Bergman, *A number system with an irrational base*, Mathematics magazine 31 (2) (1957), 98–110

[2] B. Dorminy, *Predicting improper fractional base integer characteristics*, dostupan na `http://educ.jmu.edu/~lucassk/Papers/DorminyFracBase.pdf`

[3] J. Duda, *Complex base numeral system*, 2007, dostupan na `https://arxiv.org/pdf/0712.1309.pdf`

[4] S. V. Fomin, *Number systems. Popular lectures in mathematics*, The university of Chicago Press, 1974.

[5] M. Gazalé, *Number from Ahmes to Cantor*, Princeton University Press, 2000.

[6] D. Gerdemann, *Combinatorial proofs of Zeckendorf family identities*, The Fibonacci quarterly, Vol. 46/47, Number 3, 2008/9.

[7] W. J. Gilbert, *Arithmetic in complex bases*, Mathematics Magazine 57 (2) (1984), 77–81, dostupno na `http://www.math.uwaterloo.ca/~wgilbert/Research/ArithCxBases.pdf`

[8] B. Hayes, *Third base*, American Scientist. Sigma Xi, the Scientific Research Society 89 (6): 490494

[9] G. Ifrah, *The universal history of numbers, from prehistory to the invention of the computer*, Wiley, 2000.

[10] D. E. Knuth, *An imaginary number system*, Communications of the ACM 3 (4) (1960), 245

[11] D. E. Knuth, *The art of computer programming 1* (3rd ed.), Addison-Wesley, 1997.

[12] D. E. Knuth, *The art of computer programming 2* (3rd ed.), Addison-Wesley, 1997.

[13] P. Krtolica, *Stari Vavilonci i njihova matematika*, Matematika i informatika, br. 1, sveska 1–2, 2008, 9–14

[14] P. Krtolica, *Stari Egipćani i njihova matematika*, Matematika i informatika, br. 1, sveska 3, 2009, 1–7

[15] P. Krtolica, *Pozicioni brojni sistemi i prevođenje brojeva*, Matematika i informatika, br. 2, sveska 1, 2013, 1–6

[16] A. Mohan, *Residue number systems*, Springer, 2016.

[17] W. Parry, *On the $\beta-$expansions of real numbers*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 11 (34) (1960), 401416

[18] J. Quesnelle, *Foundations of the golden ratio base*, 2015.

[19] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 8 (34) (1957), 477493

[20] C. Rousseau, *The phi number system revisited*, Mathematics magazine 68 (4), (1995), 283–284

[21] A. Stakhov, *Numeral systems with irrational bases for mission- critical applications*, World Scientific, 2017.

[22] `www.ternary.3neko.ru`

[23] `http://personal.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phigits.html`

[24] Weisstein, Eric W. "Base." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Base.html

[25] https://www.computer-museum.ru/articles/setun-i-setun-70/

[26] https://www.theoremoftheday.org/Binomial/Zeckendorf/TotDZeckendorf.pdf

[27] https://en.wikipedia.org/wiki/General_Conference_on_Weights_and_Measures

[28] https://en.wikipedia.org/wiki/Roman_numerals

[29] https://www.wikizero.com/en/Variable_star_designation